• $-x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} \leq 0$

$\Leftrightarrow G(x) \leq \frac{1}{2}(\ln 2)^2 + \ln 2 + 1$

$\Leftrightarrow F(\text{Log}2) + 2G(x) \leq F(\text{Log}2) + 2\left[\frac{1}{2}(\ln 2)^2 + \ln 2 + 1\right]$

Par suite $\forall x \in [\text{Log}2, +\infty[; F(x) \leq M$ avec

$$M = F(\text{Log}2) + 2\left[\frac{1}{2}(\ln 2)^2 + \ln 2 + 1\right]$$

$\oplus$ F est croissante sur $\mathbb{R}^+$

$\Rightarrow \forall x \in [0; \text{Log}2]$ on a $F(x) \leq F(\text{Log}2) \leq M$

D'où $\forall x \in [0; \text{Log}2]$ on a $F(x) \leq M$.

En bilan: $\forall x \in \mathbb{R}^+; F(x) \leq M$.

d- On a déjà F est $\nearrow$ et majorée donc elle possède une limite finie.

Comme $\forall x \in \mathbb{R}^+; F(x) \leq M$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) \leq M$.

B-1)a- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$

$$e^{-x} + e^{-2x} + \ldots + e^{-nx} = e^{-x}\left[1 + e^{-x} + e^{-2x} + \ldots + e^{-(n-1)x}\right]$$
$$= e^{-x}\left[1 + (e^{-x}) + (e^{-x})^2 + \ldots + (e^{-x})^{(n-1)}\right]$$

Comme $x > 0$ alors $e^{-x} < 1$.

D'où $e^{-x} + e^{-2x} + \ldots + e^{-nx} = e^{-x}\frac{1 - (e^{-x})^n}{1 - e^{-x}} = e^{-x}\frac{1 - (e^{-x})^n}{e^{-x}(e^x - 1)}$

$$= \frac{1}{e^x - 1} - \frac{e^{-nx}}{e^x - 1}$$

Signifie que $\frac{1}{e^x - 1} = e^{-x} + e^{-2x} + \ldots + e^{-nx} + \frac{e^{-nx}}{e^x - 1}$.

b- $\forall t \in \mathbb{R}^+; 0 \leq f(t) \leq f(a) = a(2-a)$ car $f(a)$ est le maximum de f

$\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}^+; 0 \leq f(t)e^{-nt} \leq a(2-a)e^{-nt}$.

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+; 0 \leq \int_0^x f(t)e^{-nt}dt \leq a(2-a)\int_0^x e^{-nt}dt$.

Signifie que $\forall x \in \mathbb{R}^+; 0 \leq \int_0^x f(t)e^{-nt}dt \leq a(2-a)\left[-\frac{1}{n}e^{-nt}\right]_0^x$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+; 0 \leq \int_0^x f(t)e^{-nt}dt \leq a(2-a)\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n}e^{-nx}\right]$

D'autre part $-\frac{1}{n}e^{-nx} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{n} - \frac{1}{n}e^{-nx} \leq \frac{1}{n}$

$$\Leftrightarrow a(2-a)\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n}e^{-nx}\right] \leq \frac{a(2-a)}{n}.$$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}^+; 0 \leq \int_0^x f(t)e^{-nt}dt \leq \frac{a(2-a)}{n}$.

c- x étant un réel positif

$I_n(x) = \int_0^x t^2e^{-nt}dt$ $\left(\begin{array}{lll} u_1'(t) = e^{-nt} & \rightarrowtail & u_1(t) = -\frac{1}{n}e^{-nt} \\ v_1(t) = t^2 & \rightarrowtail & v_1'(t) = 2t \end{array}\right)$